

Title	或種ノ積分方程式ニツイテ (IV)
Author(s)	泉, 信一; 北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 90 p.9-p.15
Issue Date	1936-05-22
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74324
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

399. 或種ノ積分方程式ニツイテ(IV)

泉 信 一 (東北大)

北 川 敏 男 (阪大)

本論文ノ目的ハ前ニ、(I)-(III)ニ於テ考ヘタ積分方程式ヲ
モット廣イ附帯條件ノ下ニ解クコトデアール。

積分方程式

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t) \quad (1)$$

ヲ考ヘル。コノ $\varphi_k(t)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$)、 (a, b)

ニ於イテ有界変分ナルトスル。附帯條件トシテ

$$f^{(k)}(x) = O(e^{g(x)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2)$$

ヲトル。コノ $g(x)$ 、 $(-\infty, \infty)$ ニテ定義サレタ偶函数

ナリ $x \geq 0$ ニテ増加函数トスル。又簡単ノタメニ、 $a=-1$ 、

$b=1$ トスル。

(2) カラ

$$|f^{(k)}(x)| \leq B_k e^{g(x)} \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

$x > 2$ ノトキ

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} B_k \int_{-1}^1 e^{g(x+t)} |d\varphi_k(t)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} B_k e^{g(x+1)} \int_{-1}^1 |d\varphi_k(t)| \end{aligned}$$

$$\text{故ニ} \int_{-1}^1 |d\varphi_k(t)| = C_k \text{ トオクトキ} \quad (4)$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k C_k \right) e^{g(x+1)}$$

故ニ

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k C_k \quad (5)$$

$$\text{トオクトキ、} |f^{(n)}(x)| \leq B_n e^{g(x+1)} \quad (6)$$

然レニ (1) ヲ満足スル $f(x)$ ハ何回デモ微分出来ル、

エシ

$$|f^{(n+v)}(x)| \leq B_{n+v} e^{g(x+v+1)} \quad (v=0, 1, \dots, m-1) \quad (9)$$

トナル様ナ B_{n+v} ($v=0, 1, \dots, m-1$) ガ定マツタトスレバ,

(1) カラ

$$f^{(m+n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^1 f^{(m+k)}(x+t) dg_k(t),$$

從ツテ (11) カラ

$$|f^{(m+n)}(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{m+k} C_k \right) e^{g(x+m+1)}$$

$$\text{故ニ} \quad B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n-1} B_{m+k} C_k \quad (8)$$

トオクトキ, (11) ハ $v=m$ ノトキ成立スル. 從ツテ一般ニ

$$|f^{(n+v)}(x)| \leq B_{n+v} e^{g(x+v+1)} \quad (v=0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

然ルニ. 方程式

$$X^n - \sum_{k=1}^{n-1} C_k X^k - C_0 X = 0 \quad (11)$$

ノ最大ノ正根ヲ ξ トシ,

$$\text{Max} \left(\xi, B_0, B_1, \sqrt[2]{B_2}, \dots, \sqrt[k]{B_k}, \dots, \sqrt[n-1]{B_{n-1}}, \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n-1} B_k C_k} \right) = D \quad (12)$$

トオクナラバ, 容易ニ合ル如ク

$$|f^{(n+v)}(x)| \leq D^{n+v} e^{g(x+v+1)} \quad (v=0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

ヲ得ルカラ, 從ツテ

$$\sum_{v=n}^{\infty} \frac{f^{(v)}(x)}{v!} r^v \ll \sum_{v=n}^{\infty} \frac{D^v e^{g(x+v+1-n)}}{v!} r^v \quad (14)$$

サテ、コゝテ

$$\sqrt[n]{\frac{D^n e^{\frac{g(x+n-n+1)}{n}}}{n!}} = e^{\frac{g(x+n-n+1)}{n} - \log n + 1 + \log D} \quad (1+o(1))$$

テアルカラ、(16)ノ右辺が収斂半徑が1ヨリ大ナルタメニハ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{g(x+n-n+1)}{n} - \log n + 1 + \log D} \leq \theta < 1$$

即チ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(x+n-n+1)}{n} - \log n + 1 + \log D \right\} < a < 0$

トナルベヨイ。ソレハ、

$$\frac{g(x)}{x} < \log x + A, \quad \text{for } x \geq x_0. \quad (15)$$

トナル様ナリ。及ビ $A < -\log D$ が存在スルベヨイ。

結局、 $x > 2$ ナルスベテノ x ニツキ、(16)ノ左辺ハ常ニ conv スル。 $x \leq 2$ ノトキモ同様ノ議論ヲ進メウルコトハ容易ニワカル。

故ニ

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^1 f^{(k)}(x+t) d g_k(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(k+m)}(x)}{m!} t^m \right\} d g_k(t) \\ &= \sum_{\Delta=0}^{\infty} f^{(\Delta)}(x) \sum_{\substack{m+k=0 \\ 0 \leq k \leq n-1}} \frac{1}{m!} \int_{-1}^1 t^m d g_k(t) \\ &= \sum_{\Delta=0}^{\infty} a_{\Delta} f^{(\Delta)}(x), \quad \text{say.} \end{aligned}$$

故 = 無限次, 微分方程式

$$f^{(n)}(x) - \sum_{s=0}^{\infty} a_s f^{(s)}(x) = 0 \quad (16)$$

ヲウル。(16), generating function, order ≤ 1 デ,
maximal type = ∞ ナラナ (前論文, Ⅲ 参照). 故 =
Valiron / 定理カラ次ノ定理ヲウル.

定理 1. $f(x)$ ハ

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t), \quad (-\infty < x < \infty),$$

及ビ附帯條件

$$|f^{(k)}(x)| \leq B_k e^{g(x)} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (3)$$

ヲ満足スルモノトスル。コノ $g(x)$ ハ $(-\infty, \infty)$ デ定義サ
レタ偶函数デ, ≥ 0 且ツ x ノ増加函数デアリ、更ニ次ノ條件
ヲ満足スルモノトスル: 乃チ

$$\frac{g(x)}{x} < \log x - A, \quad \text{for } x \geq x_0. \quad (17)$$

トナル様ナ $x_0 > 0$ 及ビ $A > \log D_e$ が存在スル。但シ, コノ
=、常数 D ハ (11), (12) = ヲ示シ 注意 = キマル正数デアルトスル。

然ルトキ, カナル $f(x)$ が

$$f(x) = \sum p_k(x) e^{\lambda_k x} \quad (18)$$

ナル形 = カケルタメノ必要且ツ十分ノ條件ハ右辺ガ abs.

conv ナルコトデアリ。

コノ λ_k ハ

$$\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \int_a^b e^{\lambda t} d\varphi_k(t) = 0 \quad (19)$$

、根ヲ、 $P_k(x)$ ハソノ次数ハ λ_k , multiplicity μ_k ヲリ
トサテ多項式トスル。

但シ
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = 0 \quad (20)$$

トスル。

特ニ (19) ノ根ノ数ガ有限ナトキニハ、(3), (17) ヲ満足ス
ル $f(x)$, 常ニ (18) テ表ハスコトガ出来ル。

注意 1. 積分方程式

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \quad (21)$$

ヲ附帯條件

$$|f(x)| \leq e^{g(x)} \quad (22)$$

ノモトテ解ク問題ニ於イテハ、

$$F(x) = \int_0^x f(\lambda) d\lambda \quad (23)$$

トオキ

$$F'(x) = \frac{1}{2} \{F(x+1) - F(x-1)\} \quad (24)$$

並ニニ

$$\begin{aligned} |F'(x)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} e^{g(t)} dt \\ &\leq e^{g(x+1)} \end{aligned} \quad (25)$$

ヲ満足スルコトカラ、(1) ノ特別ノ場合トシテ論ゼラレル。

コノトキ、 $n=1$, $B_0=1$, $C_0=1$, $D=1$ トトレバヨイ。

條件 (17) ハ明カニ満足サレテキル。

系. 定理 1 ニ於イテ條件 (3) ノ常数 B_k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$)

が與へラレズ、只、漠然ト條件(2)が與へラレタモノトスル、然ルトキ若シ(17)ノ代リ＝

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{g(x)}{x} - \log x \right) = -\infty \quad (26)$$

が與へラレルナラバ、定理1ノ結果ハソノマニ成リ立ツ。

注意2. 前論文(I)－(II)デ論ジタモノデハ、

$$g(x) = |cx| \quad (27)$$